

# Contents

<b>1</b>	<b>球状星団を知る</b>	<b>4</b>
1.1	球状星団とは何か？	4
1.2	球状星団における運動方程式の仮説を立ててみる。	5
<b>2</b>	<b>運動方程式を組み立てる上で必要な数学</b>	<b>9</b>
2.1	微分・積分	9
2.1.1	微分係数	9
2.1.2	導関数	10
2.1.3	合成関数の微分法	12
2.1.4	指数関数・対数関数	12
2.1.5	極限值 $e$	14
2.1.6	指数関数・対数関数の微分法	15
2.1.7	三角関数の微分法	15
2.1.8	$n$ 次導関数	18
2.1.9	ライプニッツの定理	18
2.1.10	ロールの定理	19
2.1.11	平均値の定理	21
2.1.12	テイラーの定理	23
2.1.13	マクローリンの定理	25
2.1.14	テイラー展開・マクローリン展開	26
2.1.15	関数の値の変化	28
2.1.16	曲線の概形・極座標	33
2.1.17	積分法の基礎	35
2.1.18	定積分の基本性質	38
2.1.19	原始関数と不定積分	40
2.1.20	基本的な関数の不定積分	41
2.1.21	$f(ax + b)$ の形の関数の不定積分	42

2.1.22	置換積分法	42
2.1.23	部分積分法	43
2.1.24	面積・体積・曲線の長さ	44
2.2	偏微分法	53
2.2.1	2変数の関数	53
2.2.2	偏導関数	53
2.2.3	接平面	54
2.2.4	全微分	55
2.2.5	合成関数の微分法	56
2.2.6	平均値の定理 (2変数)	56
2.2.7	テイラーの定理 (2変数)	58
2.2.8	マクローリンの定理 (2変数)	60
2.3	微分方程式	61
2.3.1	微分方程式と解	61
2.3.2	初期値問題	62
2.3.3	変数分離形	63
2.3.4	1階線形微分方程式	65
2.3.5	定数係数2階線形同次方程式	66
2.4	フーリエ変換	75
2.4.1	フーリエ変換とは?	75
2.4.2	三角関数の合成とスペクトル	77
2.4.3	フーリエ級数	78
2.4.4	各点収束と一様収束	80
2.4.5	複素フーリエ級数	81
2.4.6	複素フーリエ係数	82
2.4.7	スペクトル～フーリエ変換が表すものの意味～	85
<b>3</b>	<b>運動方程式を組み立てる上で必要な物理学</b>	<b>88</b>
3.1	質点力学	88
3.1.1	運動	88
3.1.2	運動と力	91
3.1.3	物体の質量	92
3.1.4	運動の3法則	92
3.1.5	運動量と力積	96
3.1.6	仕事	96
3.1.7	仕事と運動エネルギーの変化	97
3.1.8	保存力と位置エネルギー	98
3.1.9	エネルギー保存則の応用	102
3.1.10	2物体の衝突	112

3.1.11	惑星の運動とケプラーの法則	114
3.2	星団の力学	119
3.2.1	球状星団のポテンシャルモデル	119
3.2.2	ビリアル定理	124
3.3	流体力学	125
3.3.1	運動方程式と気圧傾度力	126
3.3.2	時間変化のオイラー的表現	128
3.3.3	オイラーの方程式	129
3.3.4	ナビエ・ストークス方程式	129
3.4	統計力学	130
3.4.1	拡散とランダムウォーク	130
3.4.2	拡散の解析	132
3.4.3	濃度勾配とアインシュタインの関係式	136
3.4.4	微粒子の2乗平均変位と拡散係数	138
3.4.5	ブラウン運動	142
3.4.6	希薄気体の粘性と熱伝導、拡散	143
3.4.7	ビリアル定理の導出	144
3.4.8	プラマーモデル	155
3.5	力学摩擦	156
3.5.1	ラザフォード散乱	156
3.5.2	散乱断面積	162
3.5.3	力学摩擦 (dynamical friction)	164
<b>4</b>	<b>コンピュータによるシミュレーション</b>	<b>172</b>
4.1	C言語の基礎	172
4.1.1	コンピュータの仕組み	172
4.1.2	プログラムができあがるまで	173
4.1.3	統合開発環境とデバッグ	175
4.2	ルンゲ・クッタ法	175
4.2.1	高階常微分方程式の解法	177
4.3	差分方程式	180
4.3.1	拡散方程式	180
4.3.2	格子法	181
4.3.3	差分方程式	182
4.3.4	ブラウン運動のシミュレーション	187
4.4	gnuplotによるアニメーションの作成方法	188
4.4.1	いよいよ球状星団の数値シミュレーション	191
<b>5</b>	<b>球状星団の最新の研究</b>	<b>193</b>

# Chapter 1

## 球状星団を知る

### 1.1 球状星団とは何か？

球状星団 (globular cluster) とは、星が球状に密集した星団である。大きな特徴としては星の数の密度が中心に行くほど大きくなっていることである。また星は星団全体の重力によって束縛されていて、長い間球状の形を保っている。星団に含まれる星の数は数万から数百万個に達する。年齢は 100 億年以上と老齢で、ほとんどは太陽よりも軽い (寿命が長い) 星であり、銀河系の歴史のなかでも早い時期にできたと考えられている。

温度と絶対等級の関係を表す図である H・R 図 (デンマークのヘルツシュプルングとアメリカのラッセルによって明らかにされた) においては、球状星団では多くの星が赤色巨星 (温度が低いいため、星の色は赤っぽい) の段階にあることを示している。星の表面大気の温度が低いのに、明るさが極めて大きいため、星の半径が極端に大きいことを意味している。

球状星団は、銀河のディスク (バルジのまわりを取り囲む円盤状の構造であり直径がおよそ 10 万光年、厚さは中心部で 1 万 5000 光年、外側では 1000 光年) とバルジ (銀河系中心部のふくらんだ部分) を取り囲むハローと呼ばれる領域に分布している (1 光年は 1 年に光が進む距離のことであり、およそ 9 兆 5000 億 km!。ちなみに光の速さはおよそ  $3.0 \times 10^8 m/s$  である)。私たちを取り囲む銀河系ではこれまでに約 150 個が発見されている。

## 1.2 球状星団における運動方程式の仮説を立ててみる。

球状星団は数万個もの星が集まり、自己重力によって束縛されて球状を保っている。これは球状星団の定義であり、一般的な球状星団について成り立つ。

ここで私は球状星団の形成シミュレーションを考える上で一つのモデルを考えていきたい。球状星団は様々な種類があり、一つ一つの運動方程式は異なっていると予想される。そこで2007年にハッブル宇宙望遠鏡により観測されたきよしちょう座にあるNGC104と呼ばれる球状星団をモデルとしてシミュレーションを行っていく。

きよしちょう座は南米のジャングルなどに住む、くちばしの大きな鳥「巨嘴鳥(きよしちょう)」を星座になぞらえたものであり、日本では観測が難しいが、南半球で春(日本の秋)に南の空で観測することができる。1603年にドイツ人天文学者バイエルによって作られた。この星座には、我々が住む天の川銀河のお供の銀河のひとつ小マゼラン雲があり、肉眼でも小さな雲に見える。そして小マゼラン雲より少し離れた場所に、大きく美しい球状星団NGC104を見ることができる。

2007年にハッブル宇宙望遠鏡によりこのNGC104球状星団では質量が軽くて赤い星が、質量が重くて青い星の2倍の速度で動いていることが観測された。また全体をみると青い星が中心に偏っていて、赤い星が球状星団のまわりにやや偏って分布している様子が発見されたのである。また球状星団の中心から1光年の距離において青い質量の重い星が赤くて質量の軽い星よりも多く分布していることが確かめられた(次ページ Figure 1.1)

球状星団では単独の恒星だけでなく、連星系(2つの星が共通重心のまわりをまわる)も存在している。ターザン5球状星団では、チャンドラX線望遠鏡によってミリ秒パルサー天体も観測されており、様々な天体が共存している。このような複雑さがあるにも関わらず、球状星団の全体的な密度分布やエネルギー分布、速度分布はシンプルな方程式で記述する方法が考えられている。

話を元に戻すと、NGC104のハッブル宇宙望遠鏡(HST)による観測事実から2007年に“ジョージ・メイラン”氏は青い星のグループと赤い星のグループを想定した。青い星は質量が重い星。赤い星は質量が軽い星である。これらの星のランダムな衝突、運動によって、青い星はエネルギーを失って星団の中心に分布するようになり、赤い星はエネルギーを得て星団のまわりに分布するようになると説明している。質量による星の住み分けとして“mass segregation in globular cluster”と名づけたのである。

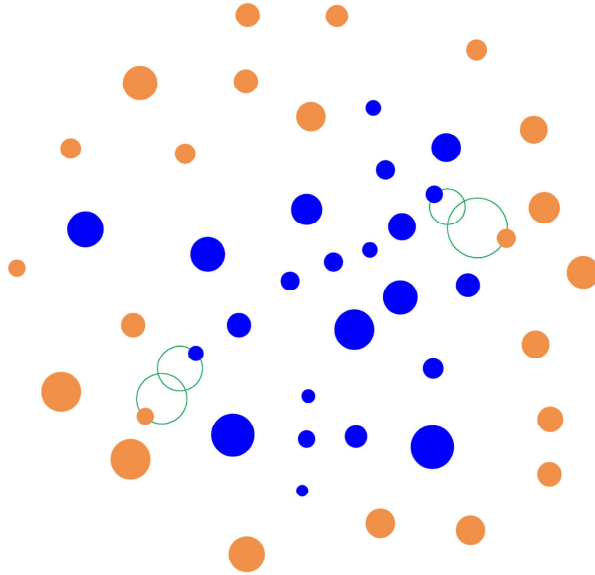


Figure 1.1: NGC104 のイメージ図

私は球状星団は個々の星が自己重力によって結束し、その重力に対抗する力として熱勾配があるため丸い形を保持していると考えている。この自己重力の計算には現在“GRAPE”と呼ばれるスーパーコンピューターによって数値計算をすること（いわゆるN体シミュレーション）が主流である。しかしこのスーパーコンピューターはそう簡単に利用することはできない。よって何か単純なモデルを使った数値シミュレーションによって再現できないのかと思う。それを再現できれば、少し手を伸ばせば買うことができるパソコンを使って数値シミュレーションを行うことで、身近に球状星団のことに触れることができるのではないかと考えた。

そこで早速、球状星団についてどのような形成の仕方がなされるかを考えていくことにしよう。

まずは球状星団における簡単な重力ポテンシャルとして、ヘンリー・プラマーモデルを紹介する。

プラマーモデルでは、球状星団の全質量を  $M$ 、球状星団の中心からの距離を  $r$  としてポテンシャル  $\phi$  を

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (1.1)$$

と表す。ここで  $b$  は定数であり、球状星団の重力場の有効半径を表す。このポテンシャルを  $r$  で微分すると、半径方向の加速度が得られる。したがってこのポテンシャル内における運動方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GMr}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.2)$$

となる。

これをさらに簡単化していく。球状星団の中心近傍の運動を考えると、 $r \ll b$  と近似できる。式としては以下ようになる。

$$\frac{d^2r}{dt^2} \cong -\frac{GM}{b^3}r \quad (1.3)$$

この解は振動運動を表す方程式になる。

上に掲げたモデルを踏まえて、球状星団の自己重力を一次元調和振動子（通称、ばねポテンシャル）で表現することにする。つまり球状星団全範囲における自己重力のポテンシャルをばねによる復元力で表し、個々の恒星が振動現象をすると考えるのである。また球状星団はたくさんの星が集まったものであるが、星自体はガス球であるため、個々の星を流体とみなして“ナビエ・ストークス”方程式を適用させる。ナビエ・ストークス方程式は個々の流体に働く力を圧力勾配、粘性力、外力の式で表現する。先ほど述べたばねポテンシャルは運動方程式では外力を表すことになる。そしてこの自己重力を表す外力に対抗する力として熱勾配を与えることを考える。熱勾配も重力に対抗する力として、単純に距離の2乗に反比例する圧力がかかっているものとして考える。そして個々の星に対して速度に比例する粘性抵抗がかかるものとする。よってナビエ・ストークス方程式はそれぞれの力にかかる係数を全て1であるとすると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{Vx^2} + \frac{dx}{dt} - x \quad (1.4)$$

という方程式になる。ここで  $V$  は星の体積を表す。

また  $y$  方向についても同様の式を与えて、2次元で等方的に運動する場合を考える。このシミュレーション結果は後の章の数値シミュレーションで述べることにする。

球状星団の形成シミュレーションを考えることは多くの物理的知識、数値シミュレーション方法の知識を必要とする。現在国立天文台では”dynamical friction (ダイナミカルフリクション)”と呼ばれる理論をベースにして grape というソフトを用いたシミュレーションを行っている。この dynamical friction 自体を理解するのもとても大変なことであるのに加えて、grape 自体を利用するのもとても難しい。また球状星団の形成過程自体がまだ研究段階にあって、はっきりした結論はまだ出ていない。球状星団の最新の研究については第5章でさらっと説明するが、この本の読者に対しては簡単に球状星団の形成過程を示すことに重点を置くこととする。読者の方にはこの本を通じて、球状星団の形成過程のはっきりしたことがわからなくとも、球状星団を考える過程において登場する、様々な物理現象、数学的知識に触れていくことで、学校の授業では体験できないような楽しさを感じていただきたいと思っている。まず最初にシミュレーションを行う上で必要な数学的知識、物理学的知識を説明していくこととしよう。



## Chapter 2

# 運動方程式を組み立てる上で必要な数学

### 2.1 微分・積分

微分とはある関数の微少な値の変化に対して、どれくらいの量が増えるかを求めることである。なお関数というのは、 $x$  を指定したとき、それに対して  $y$  が定まるような関係をいう。まずは微分係数について説明していく。

#### 2.1.1 微分係数

関数  $y = f(x)$  において  $x$  が  $a$  から  $a + \Delta x$  まで変化するときの  $y$  の増分は  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$  である。このとき

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

を  $x$  が  $a$  から  $a + \Delta x$  まで変化するときの  $f(x)$  の平均変化率という。

$\Delta x \rightarrow 0$  のとき  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  が一定の極限值を持つならば、この極限値を  $f'(a)$  と書き、 $x = a$  における  $f(x)$  の微分係数という。すなわち

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

または  $\Delta x$  の代わりに  $h$  と書けば、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2.3)$$

$f'(a)$  が存在するとき、関数  $f(x)$  は  $x = a$  で微分可能であるという。  
また  $f(x)$  が开区間  $I$  の全ての点で微分可能ならば、 $I$  で微分可能であるという。

### 2.1.2 導関数

関数  $f(x)$  が  $x$  の区間  $I$  で微分可能であるとき、 $I$  の全ての  $x$  に対して微分係数  $f'(x)$  を考えると  $f'(x)$  は  $I$  で定義される関数になる。これを  $f(x)$  の導関数という。 $f(x)$  に対して  $f'(x)$  を求めることを  $f(x)$  を微分するという。なお  $f'(x)$  は  $y'$ 、 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d}{dx}f(x)$  などでも表される。' はダッシュ、もしくはプライム記号とも呼ばれ、 $\frac{dy}{dx}$  は "ディーワイディーエックス" と読む。

微分可能な関数  $y = f(x)$  において  $x$  が  $x \rightarrow x + \Delta x$  のように  $dx$  だけ変化するとき、点  $P(x, f(x))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線  $PT$  上での対応する  $y$  座標の変化 (Figure 2.1 の  $QR$ ) を  $dy$  と書くと、

$$dy = f'(x)dx \quad (2.4)$$

これを関数  $y = f(x)$  の微分という。 $dx$  が微小であるとき、(2.4) 式の微分  $dy$  は  $y$  の真の増分

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \quad (2.5)$$

(Figure 2.1 の  $QS$ ) の近似値であり、この近似は  $dx \rightarrow 0$  となるとき限りなく正確になる。簡単にいうと、

「 $x$  の微小変化  $dx$  に対する  $y$  の変化量は  $dy = f'(x)dx$  である」

同じことを次のように言い換えることもできる。

「 $x$  の増分を  $\Delta x$  とし、これに対する  $y = f(x)$  の増分を  $\Delta y$  とすると、 $\Delta x$  が 0 に近ければ、近似式

$$\Delta y \cong f'(x)\Delta x \quad (2.6)$$

が成り立ち、この近似式は  $\Delta x \rightarrow 0$  のとき限りなく正確になる。